

Prot. Nr. 14	Technologisches Gewerbemuseum in Wien <b>Laboratoriumsübungen</b>	Übung am: 26.2.1968
Jg. N46		Abgabe am: 4.3.1968
Gr. Nr. 4	Zu- und Vorname Wimmer Richard	§1

Übung (Nr. und Titel) Untersuchungen an 2-Polen	Laboratoriumsübungen aus Elektronik u. Radiotechnik
--	---

Übungsanordnung:

Gerätebezeichnung im Schaltbild	Art und Type des Gerätes (Meßwerk)	Erzeuger- Firma	F. Nr. (J. Nr.)	Nähere Angaben (Meßbereich)

Alle Beilagen sind einzukleben!

## Theorie:

### Erhaltungstheorie



Ein 2-Pol ist verifizierbar wenn 1 und 2 vertauscht werden kann. Das ist nur möglich wenn der 2-Pol nur L, C und R enthält.

Ein passiver 2-Pol nimmt Leistung auf, ein aktiver gibt Leistung ab. Wenn 1 und 2 nicht vertauschbar sind, so wird er als linearer 2-Pol bezeichnet.

$Z$  und  $Y$  sind  $n \times n$  Matrizen

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

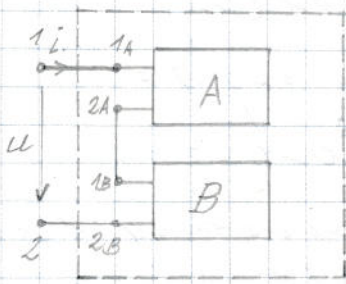
$$u = Z \cdot i \quad i = Y \cdot u$$

$$Z = R_s + jX_s$$

$$Z = (Z_{11}) \quad Y = (Y_{11})$$

2-Pole sind durch eine einzige Zahl bestimmt.

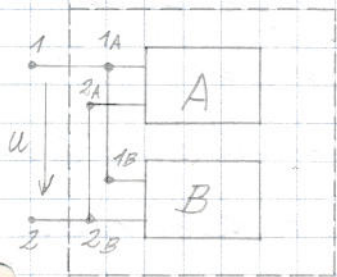
# Serien- und II-Erhaltung von Zweipolen



$$U_A = Z_A \cdot i \quad U = U_A + U_B$$

$$U_B = Z_B \cdot i \quad Z = Z_A + Z_B$$

$$Z = R_{SN} + jX_{SN} \quad R_S = \sum R_{SN} \quad X_S = \sum X_{SN}$$



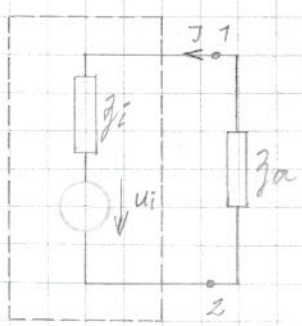
$$i_A = Y_A \cdot U \quad Y = G_P + jB_P$$

$$i_B = Y_B \cdot U \quad G_P = \sum G_{Pn}$$

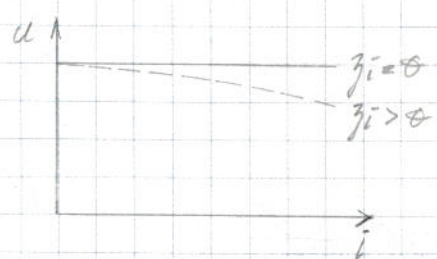
$$Y = Y_A + Y_B \quad B_P = \sum B_{Pn}$$

## Relative Zweipole

### 1) Spannungsgenerator

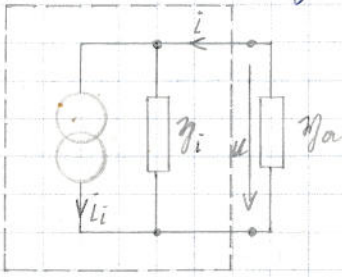


Ein idealer Spannungsgenerator wurde bei jeder Belastung einer konstanten Spannung halten. Da aber jede Spannungsquelle einen Innenwiderstand hat wird der Idealfall nie erreicht.

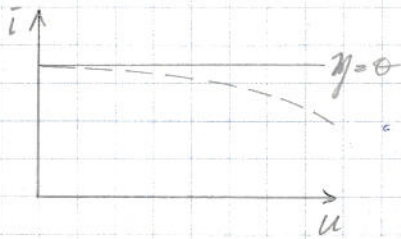


$$u_i = u + Z_i \cdot i \quad u = u_i - Z_i \cdot i$$

## 2) Stromgenerator

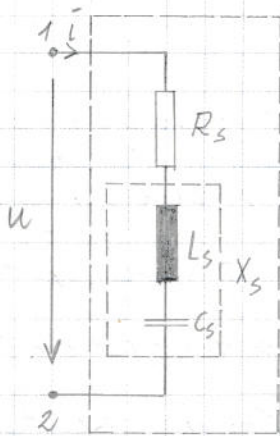


Bei ihm gilt das gleiche wie beim Spannungs-generator nur das an die Stelle der Spannung der Strom tritt. Der Stromgenerator darf nie im Leerlauf betrieben werden, beim Abschalten muß er kurzgeschlossen werden.

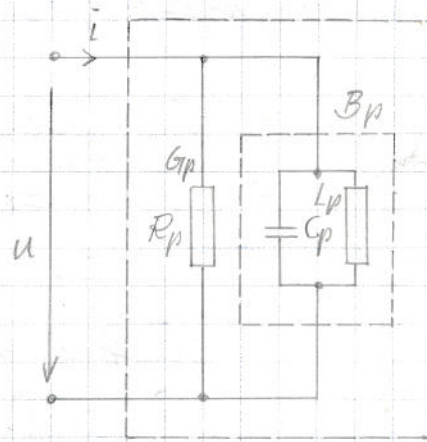


$$i = i_i - Y_i \cdot u$$

## Passive Zweipole



≡



$$z = \frac{u}{i} = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{i}{u} = \frac{1}{z}$$

$$z = R_s + j\left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$y = G_p + j\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right)$$

$$z = R_s + jX_s = Z e^{i\varphi}$$

$$y = G_p + jB_p = Y e^{i\psi}$$

$$Z = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

$$Y = \sqrt{G_p^2 + B_p^2}$$

$$R_s = Z \cos \varphi$$

$$G_p = Y \cos \psi$$

$$X_s = Z \sin \varphi$$

$$B_p = Y \sin \psi$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_s}{R_s}$$

$$\psi = \arctan \frac{B_p}{G_p}$$

$$\eta = \frac{1}{Z} \quad G_p + jB_p = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{Z^2}$$

$$G_p = \frac{R_s}{Z^2} \quad B_p = -\frac{X_s}{Z^2}$$

$$\eta = \frac{R_s - jX_s}{Z^2} \quad Y = \frac{\sqrt{R_s^2 - jX_s^2}}{Z^2} = \frac{1}{Z}$$

$$\psi = \arctan \frac{B_p}{G_p} = \arctan \left( -\frac{X_s}{R_s} \right) = -\arctan \frac{X_s}{R_s} = -\varphi$$

$$R_s + jX_s = \frac{1}{G_p + jB_p} = \frac{G_p - jB_p}{Y^2}$$

$$Z = \frac{1}{\eta} \quad R_s = \frac{G_p}{Y^2} \quad X_s = -\frac{B_p}{Y^2}$$

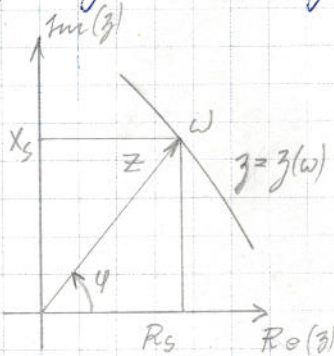
$$Z = \frac{G_p - jB_p}{Y^2} \quad Z = \frac{1}{Y}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_s}{R_s} = \arctan \left( -\frac{B_p}{G_p} \right) = -\arctan \frac{B_p}{G_p} = -\psi$$

## Grafische Darstellung von Zweipolen

1) Ortskurve

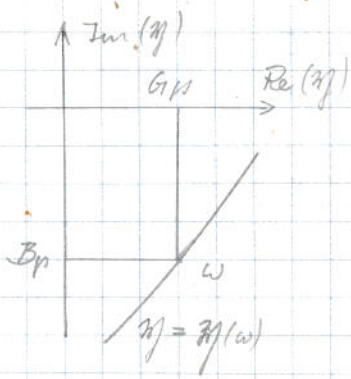
$$z = z(\omega) ; \eta = \eta(\omega)$$



induktiv

induktiv

kapazitiv



kapazitiv  
induktiv

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$Y e^{i\varphi} = \frac{1}{Z} e^{-i\varphi}$$

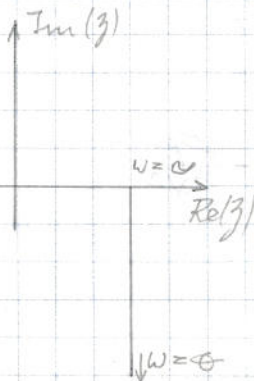
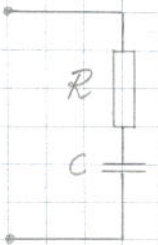
$$Y = \frac{1}{Z} \quad \varphi = -\varphi$$

$$Z = \frac{1}{Y}$$

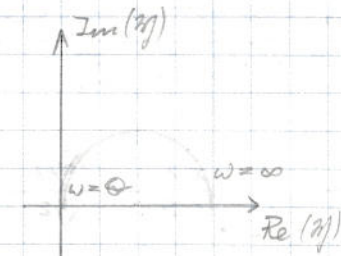
$$Z e^{i\varphi} = \frac{1}{Y} e^{-i\varphi}$$

$$Z = \frac{1}{Y} \quad \varphi = -\varphi$$

Beispiele:



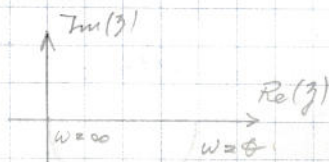
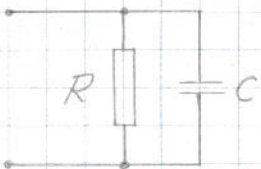
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C}$$



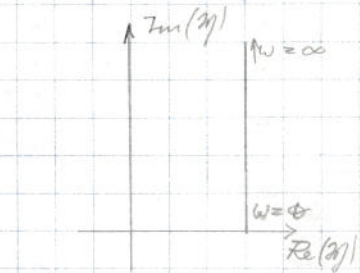
invertiert

$$Y = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Um grafisch  $Z$  in  $Y$  oder umgekehrt zu verwandeln wird am Einheitskreis invertiert. Der Einheitskreisradius wird meist gleich dem  $R$  gewählt.



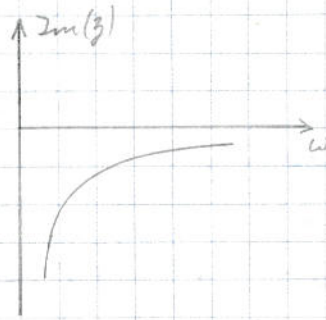
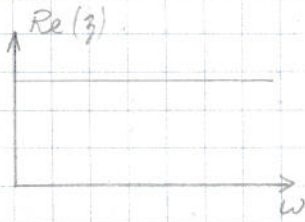
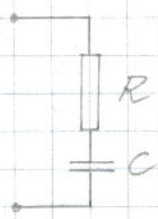
$$Z = \frac{\frac{1}{R} - j\omega C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$



$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C$$

## 2) Komponentenwertdarstellung

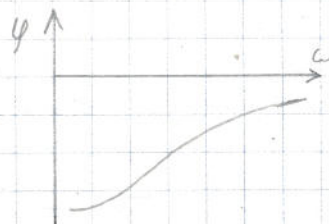
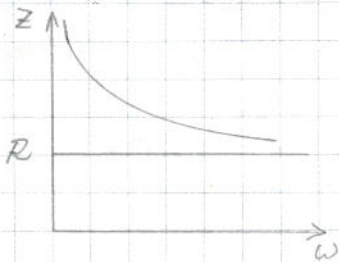
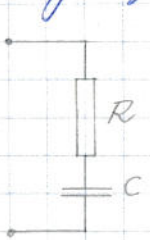
Beispiel:



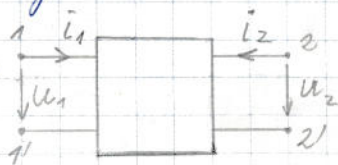
## 3) Betrag und Winkel (Phase)

$$z = z(\omega) \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

$$z = |z(\omega)| \quad \varphi = \varphi(\omega)$$



Zur Verfallständigkeit noch die 4-Pol Theorie in ihren Grundzügen



$$u_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$u_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

Widerstandsmatrix

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

Dies Verhalten ist dadurch eindeutig bestimmt.

Leitwertmatrix

$$i_1 = y_{11} u_1 + y_{12} u_2$$

$$i_2 = y_{21} u_1 + y_{22} u_2$$

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

# Hybriddarstellung

$$u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2$$

$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2$$

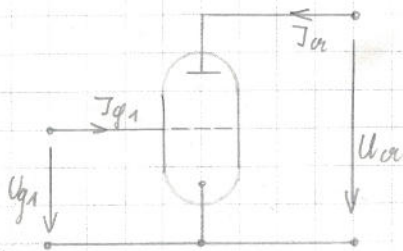
$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{u_2 = 0}$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{u_2 = 0} \quad \text{Kurzschlussstromverstärkung}$$

$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2} \Big|_{i_1 = 0} \quad \text{Leerlaufspannungsverstärkung}$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2} \Big|_{i_1 = 0} \quad \text{Ausgangskleitwert}$$

## Röhre als 4-Pol

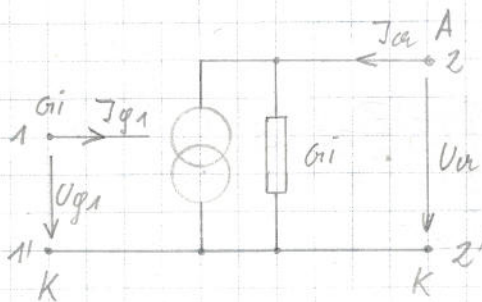


$$i_{g1} = 0$$

$$i_a = S u_{g1} + G_i u_a$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & G_i \end{pmatrix}$$

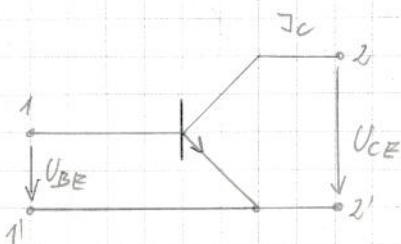
## Ersatzschaltung



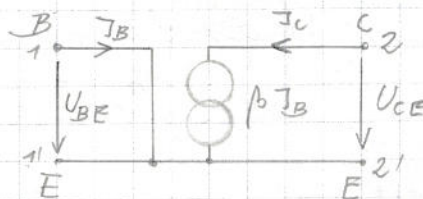
$$y_{21} = S$$

$$y_{22} = G_i$$

## Transistor als 4-Pol



## Ersatzschaltung



$$u_{BE} = 0$$

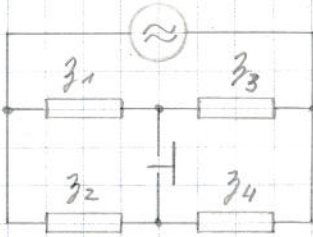
$$i_C = \beta \cdot i_B$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_{21} = \beta$$



Für Widerstandsmessung an einem Zweipol wird eine Wechselstrombrücke verwendet.



$$Z_1 : Z_2 = Z_3 : Z_4$$

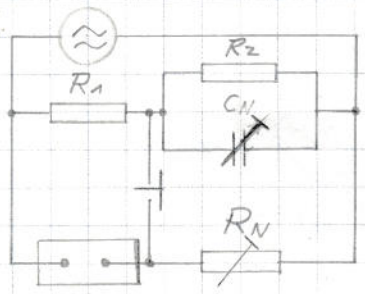
$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3$$

$$Z_1 = e^{i\varphi_1} \cdot Z_2 = e^{i\varphi_2} \cdot Z_3 = e^{i\varphi_3} \cdot Z_4 = e^{i\varphi_4}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{Z_3}{Z_4} e^{i(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

$$Z_1 : Z_2 = Z_3 : Z_4 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$$

bei induktivem Verhalten

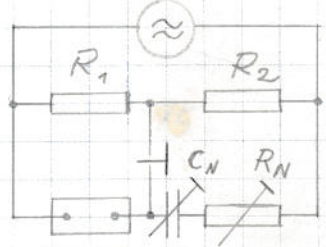


$$\operatorname{Re}(Z) = R_S = \frac{R_1}{R_2} R_N$$

$$\operatorname{Im}(Z) = X_S = \omega R_1 R_N C_N$$

$$Z = R_S + jX_S$$

bei kapazitivem Verhalten



$$\operatorname{Re}(Z) = R_S = \frac{R_1}{R_2} R_N$$

$$\operatorname{Im}(Z) = X_S = -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\omega C_N}$$

$$Z = R_S + jX_S$$

## Übungsumfang:

Es sind zwei 2-Pole zu messen und zwar:

I) A; II) B; III) A+B; IV) A||B

Der Generator muß immer auf der gleichen Frequenz bleiben.

Zumessen ist bei:

1 kHz, 2 kHz - 10 kHz, 11 kHz u. 12 kHz.

## Aufwertung:

- 1) 3 Ortskurven von I, II, III, IV  
 $z_1 + z_2 = z_3$  ist geom. zu zeigen
- 2) 4 Ortskurven I, II, III, IV  
 $y_1 + y_2 = y_4$  ist geom. zu zeigen
- 3) 1. u. 2. Inversion
- 4) Komponentenentwicklung I, II, III, IV  
für  $z$  u.  $y$
- 5) Betrag und Winkel I, II, III, IV
- 6) Auf Schaltung schließen und Werte angeben.

Richard Wimmer

# Meßergebnisse:

$$R_1 = R_2 = 1000 \Omega \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1000}{1000} = 1$$

I A; II B; III A+B; IV A//B

2-Pol	f	R <sub>N</sub>	C <sub>N</sub>	Z	-φ	R <sub>s</sub>	X <sub>s</sub>	Y	-φ	G <sub>p</sub>	-B <sub>p</sub>
	kHz	kΩ	nF	kΩ	°	kΩ	kΩ	mS	°	mS	mS
I	1	1,01	12	13,42	85,3	1,01	13,4	0,045	-85,3	0,055	0,445
II		0,95	890	0,966	10,4	0,95	0,148	1,05	-10,4	1,02	0,29
III		1,93	30,9	5,55	69,6	1,93	5,2	0,18	-69,6	0,063	0,168
IV		0,84	110	1,55	55,7	0,84	1,26	0,645	-55,7	0,364	0,525
<del>I</del>	<del>2</del>	<del>9,4</del>	<del>12</del>	<del>11,8</del>	<del>34,6</del>	<del>9,4</del>	<del>6,7</del>	<del>0,085</del>	<del>-34,6</del>	<del>0,07</del>	<del>0,48</del>
II		0,48	240	0,85	23,1	0,48	0,333	1,18	-23,1	1,08	0,46
III		1,82	2,8	28,5	86,3	1,82	28,5	0,032	-86,3	0,002	0,035
IV		0,62	199	0,437	32,8	0,62	0,400	1,23	-32,8	1,15	0,74
I	3	0,94	11,6	4,65	48	0,94	4,56	0,225	-48	0,045	0,21
II		0,43	121	0,85	31	0,43	0,44	1,18	-31	1,01	0,61
III		1,42	25	2,73	50,9	1,42	2,12	0,333	-50,9	0,23	0,28
IV		0,42	110	0,638	48,8	0,42	0,48	1,57	-48,8	1,05	1,2
I	4	1,01	31	1,55	49,9	1,01	1,2	0,645	-49,9	0,42	0,5
II		0,61	82	0,78	38,4	0,61	0,485	1,28	-38,4	1	0,795
III		1,55	23	2,32	48,1	1,55	1,73	0,432	-48,1	0,29	0,32
IV		0,4	110	0,54	42	0,4	0,36	1,85	-42	1,38	1,24
I	5	0,94	32	1,34	46,7	0,94	1	0,43	-46,7	0,5	0,53
II		0,5	60	0,428	46,6	0,5	0,53	1,73	-46,6	0,94	1
III		1,5	21	2,14	45,3	1,5	1,52	0,464	-45,3	0,33	0,33
IV		0,34	98	0,46	41,8	0,34	0,304	1,24	-41,8	1,62	1,45



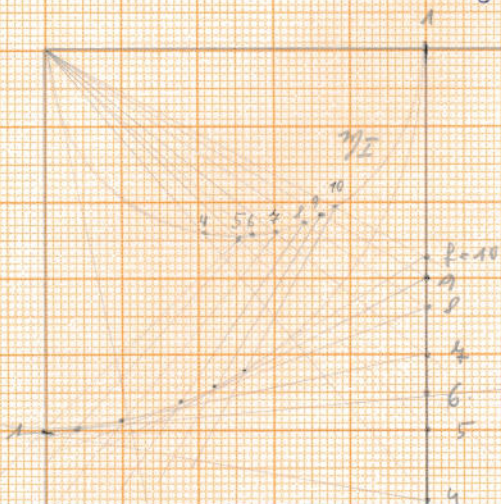
Im(z)

# 3 Ortskurven

Re(z)



# Inversion von $z_I$



Einheit:  $1k\Omega = 5cm$

2

3

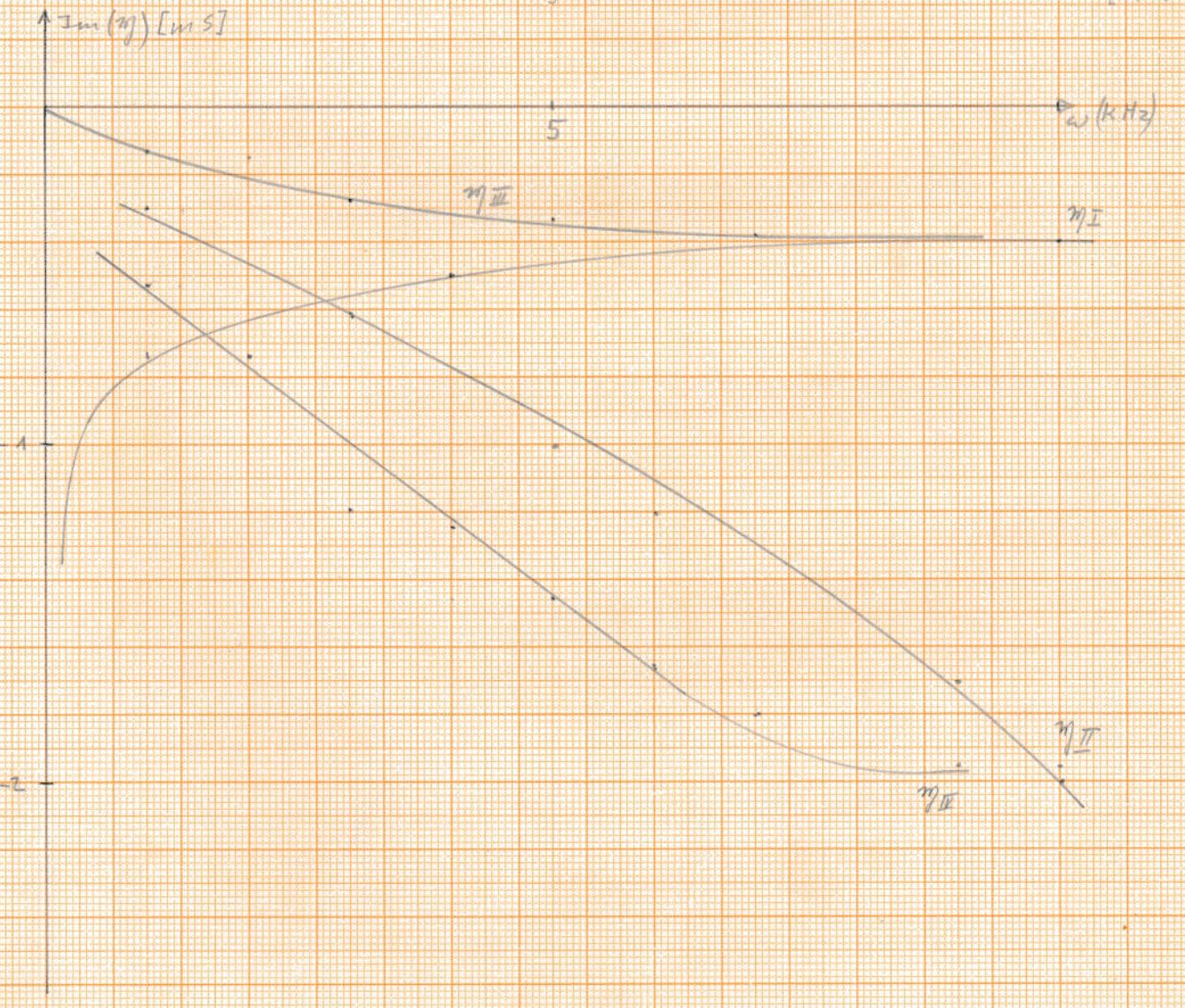
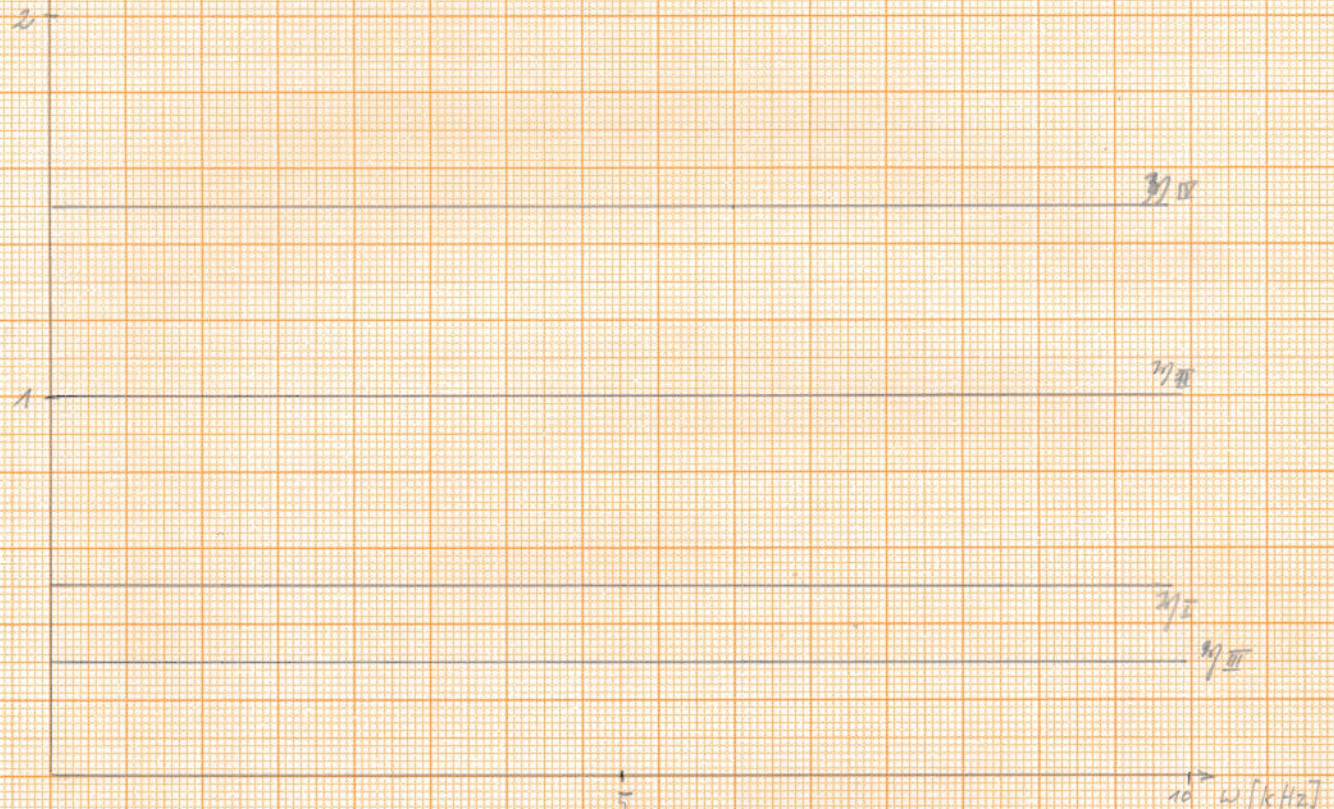
4

$-x r/B$

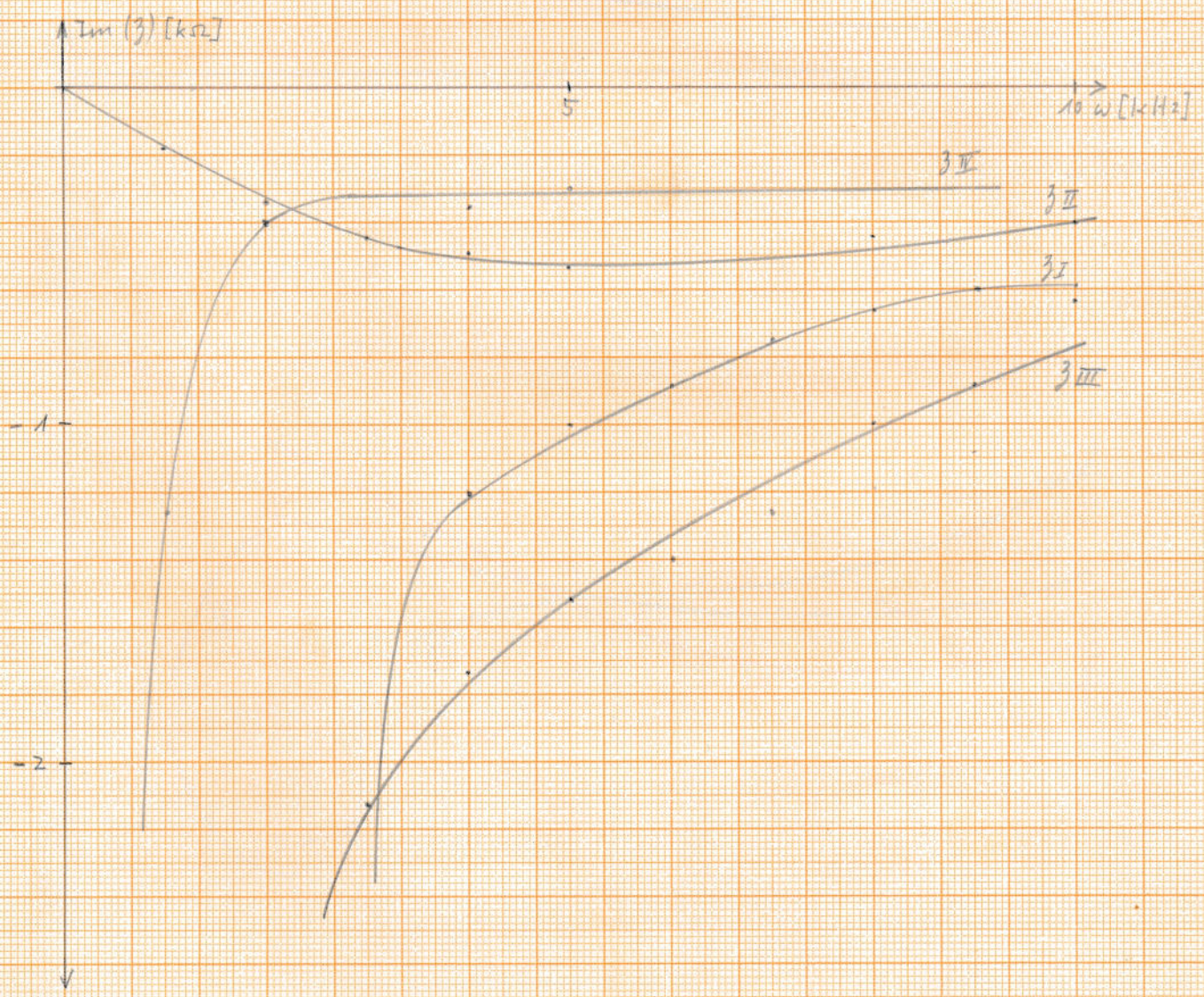
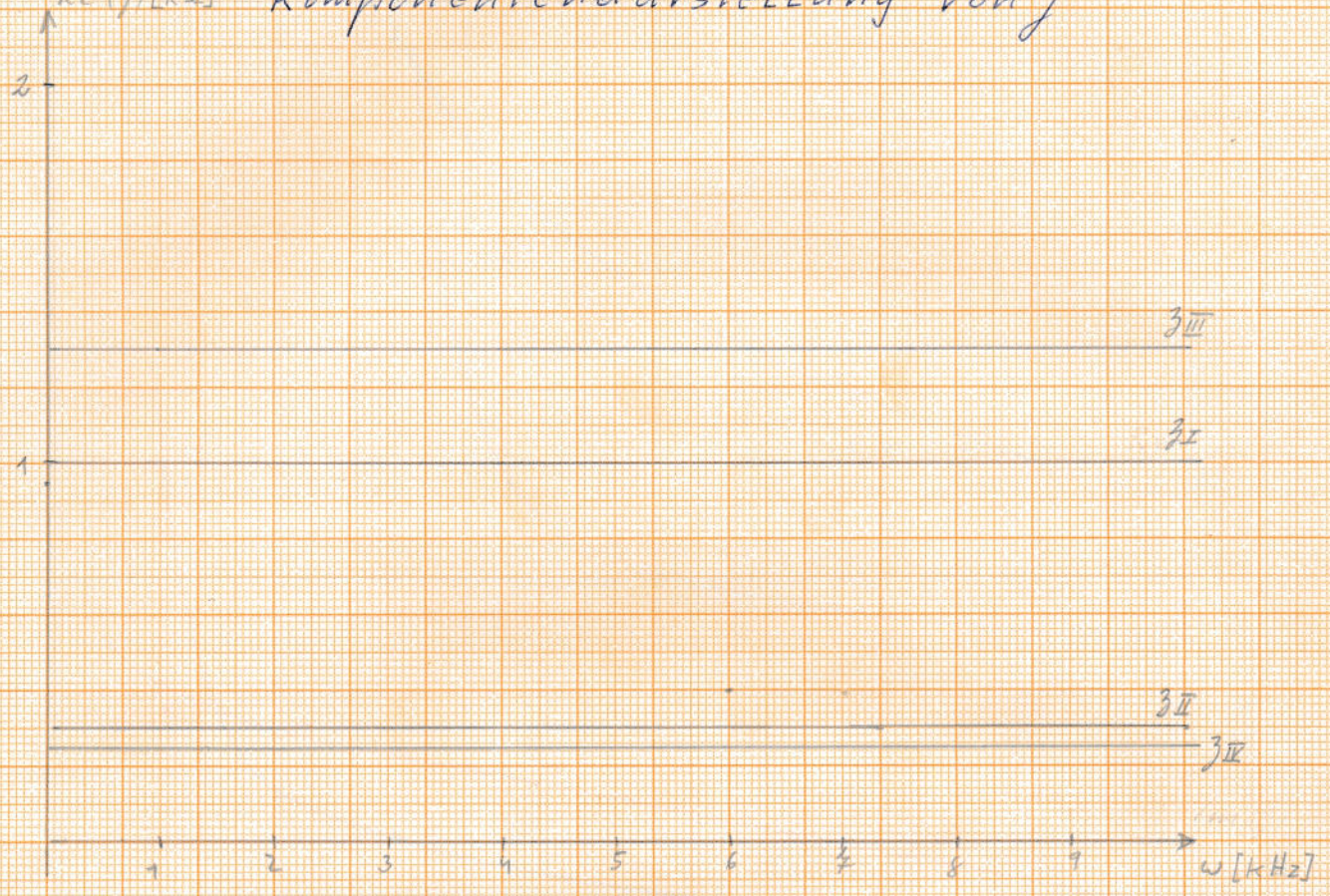
$z_I$

z

# Re( $\eta$ ) [m/s] Komponentendarstellung von $\eta$

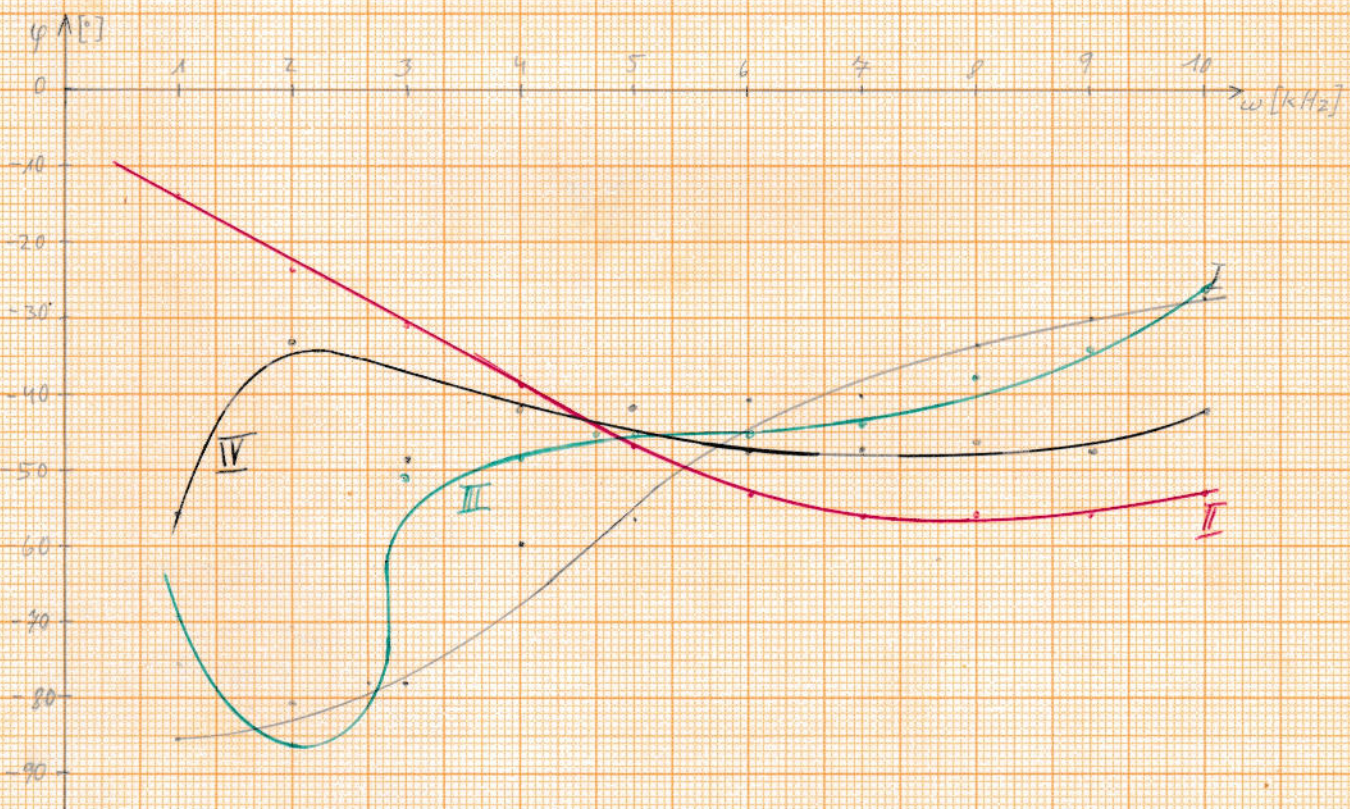
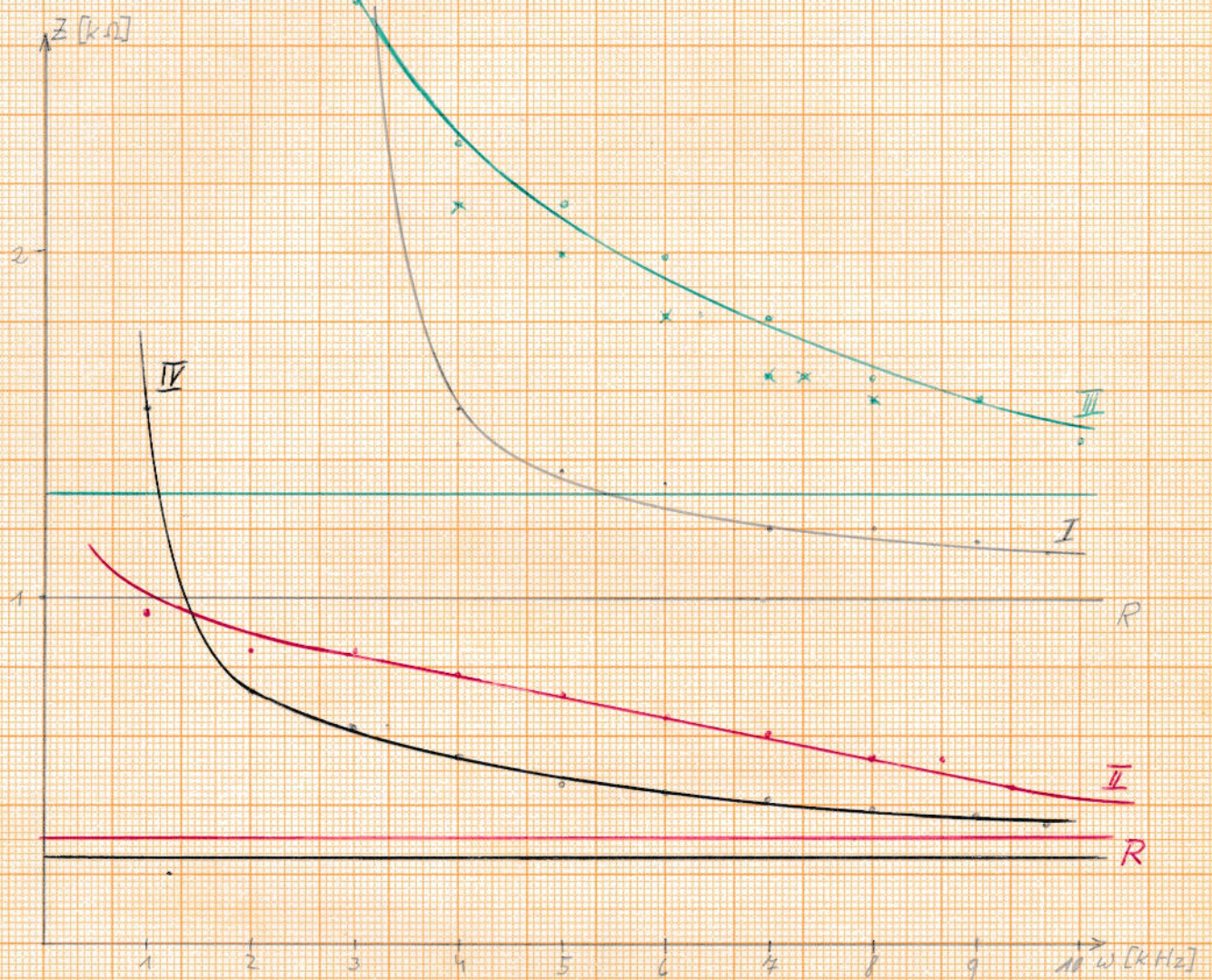


Re(z) [kΩ] Komponentendarstellung von z





# Betrag und Winkel



# Ortskurven

Einheit:  $1 \text{ kHz} = 1 \text{ ms} = 5 \text{ cm}$



# Schaltung der Zweipole

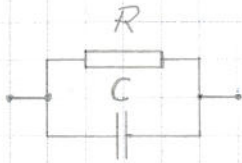
A:



$$R = 1\text{k}\Omega$$

$$C = 30\mu\text{F}$$

B:



$$R = 1\text{k}\Omega$$

$$C = 80\mu\text{F}$$